Dido-tétel és más problémák euklideszi, hiperbolikus és szférikus síkon

Doktori Értekezés

Készítette: Kertész Gábor

Matematika Doktori Iskola
Elméleti Matematika Doktori Program

Iskolavezető: Dr. Laczkovich Miklós
Programvezető: Dr. Szűcs András
Témavezető: Dr. Böröczky Károly

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2011.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatom fő témája a Fejes-Tóth László által 1960-as években felvetett úgyevezett Dido probléma vizsgálata euklideszi és Bolyai síkon. A probléma neve a mondabeli hercegnőre utal, aki a tengerparton annyi földet kapott, amennyit egy bika bőrével el tudott keríteni. Dido a bőrt vékony csíkokra vágta, azokat egymás után kötötte, s e kötéllel félkör alakban jelölt ki területet. Vergíliusz szerint így alapították Kartágót. Fejes-Tóth László azt kérdezte [2], mire ment volna hősnőnk a szárazföld belsejében merev rudak egy adott készletével? Hogy keríthetünk körül adott hosszúságú szakaszok rendszerével a maximális területet? A sejtés kézenfekvő. Ha az adott oldalakkal van húrsokszög, s az tartalmazza a kör középpontját, ő a legnagyobb területű. Ha nem, akkor a leghosszabb oldalt kell addig csökkenteni, hogy az oldalakkal legyen húrsokszög, s a rövidített oldal a kör átmérője legyen.

Első pillanatra nem látszik, hol itt a nehézség, hiszen nem túl nehéz belátni, hogy az adott számkészlettel maximált oldalhosszúságú n-szögek között az említett húrsokszög a maximális területű. A probléma az, hogy a szakaszok össze-vissza keresztezhetnek akárhány másikat is. Ez ugyan érezhetően pazarlás, de annyira kezelhetetlenné teszi a határolt terület becslését, hogy neves matematikusok több sikertelen kísérlete után úgy húsz év múltán diplomamunkámban bizonyítottam először. Később Alan Siegel adott jóval rövidebb, frappáns bizonyítást [4].

Mi vezetett arra, hogy újra elővegyem a kérdést? Az, hogy Siegel jellegzetesen euklideszi eszközöket használt, míg módszerem könnyen abszolútizálható. Valóban sikerült az eredeti sejtést hiperbolikus síkon is bizonyítani, amint arról e dolgozat második részének elolvasásával meg is győződhetnek.

Euklideszi síkon ismert, hogy adott oldalhosszak mellett a húrsokszög területe legnagyobb. Kevésbé jól ismert, hogy hiperbolikus és gömbi esetben a ciklusba (körbe, hiperciklusba vagy paraciklusba) írt sokszög az optimális. E két állítást később poligonális Dido-tételnek nevezem. E második állítás bizonyítása [1] azon alapul, hogy állandó görbületű síkon egy zárt görbe, mely tartalmaz egy adott nagyságú szakaszt, akkor keríti körül a maximális területű tartományt, ha a szakasz két végét ciklusív köti össze [5]. Mivel kedvelem az elemi okoskodásokat, az első részben leírom a poligonális Dido-tétel egy ilyen bizonyítását. Ez ráadásul egységes mindhárom állandó görbületű felületen.

A harmadik téma független, és szépsége miatt került ide. Heppes Aladár megkérdezte [3], hogy adott n-re mi az a minimális d_n, hogy n darab d_n átmérőjű halmazzal lefedhető az egységgömb felülete? Igazolta, hogy $d_8 = 90°$, és úgy vélte, hogy $d_9 = d_8$. Ennek bizonyításába azonban hiányosnak bizonyult, így megadatott a lehetőség, hogy az utolsó részben mutathassak egyet.

1. FEJEZET

A poligonális Dido-tétel

1. TÉTEL (Csuklós sokszög tétel). *Az adott oldalhosszúságokkal rendelkező sokszögek között a ciklusba írt területe a legnagyobb. Gömbön megköveteljük, hogy a kerület kisebb legyen, mint π.*

A ciklusba írt sokszöget a továbbiakban húrsokszögnek nevezem. Konstruáljuk meg a ciklusba írt sokszöget. Hagyjuk el az s leghosszabb oldalt, s a többit fűzzük egyenesen egymás után. A kapott nyílt töröttvonal kezdő és végpontja ekkor a poligonális egyenlőtlenség miatt s-nél távolabb van. Ha most a töröttvonalat egyre nagyobb görbületű ciklusba írjuk, a végpontok folytonosan közelednek, míg távolságuk el nem éri s-et. Ez az eljárás elemi módon, a görbület fogalma nélkül is működik, ha helyette a nyílt töröttvonalban két szomszédos oldal monoton csökkenő szögét vizsgáljuk.

Másodiknak igazoljuk, hogy a tétel igaz négyszögekre:

1. LEMMA (Húrnégyszög). *Az adott oldalhosszúságokkal rendelkező négyszögek között a ciklusba írt a legnagyobb területű. Gömbön természetesen megköveteljük, hogy a kerület kisebb legyen, mint π.*

Ennek legismertebb bizonyítása [1] felhasználja, hogy az s szakaszt úgy tudjuk a legnagyobb területű és k kerületű zárt görbévé kiegészíteni, ha az s-et kiegészítő ív ciklus (kör, paraciklus, hiperciklus) íve []. Ettől kezdve viszont az okoskodás igen rövid. Vesszük a ciklusba írt négyszöget, külön vesszük a leghosszabb, s oldalt, s a többi oldalhoz hozzáragasztjuk azt a ciklusszeletet, aminek az adott oldal a húrja. Ezeket a szeleteket ezután kifelé ráragasztjuk egy másik, ugyanezen oldalhosszakkal rendelkező konvex négyszög megfelelő oldalaira. s választása és a konvexitás biztosítja, hogy s és a ciklusívek alkotta zárt görbe egyszerű. Így az idézett izoperimetrikus egyenlőtlenség szerint s és a ciklusívek kisebb területű tartományt zárnak körül, mint e ciklusba írt esetben. Levonva a szeletek területét megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

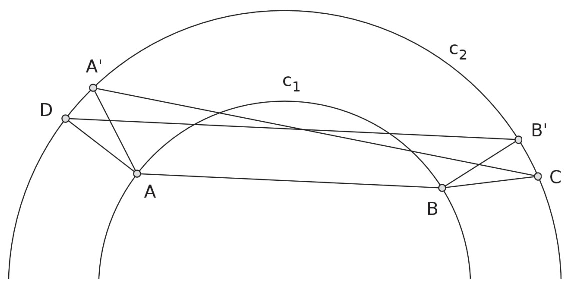
A csuklós sokszög tétel most egyszerűen adódik, mert, egy sokszög csak úgy lehet maximális, ha konvex, és a húrnégyszög lemma alapján bármely négy egymást követő csúcsa egy cikluson van.

Szeretnék most a húrnégyszög lemmára elemi és számolás nélküli bizonyítást adni, amivel persze magát az izoprimetrikus egyenlőtlenséget is megkapjuk. A probléma gimnazista korom óta izgatott, amikor Reiman István bíztatott minket, keressünk trigonometriamentes bizonyítást az euklideszi síkon.

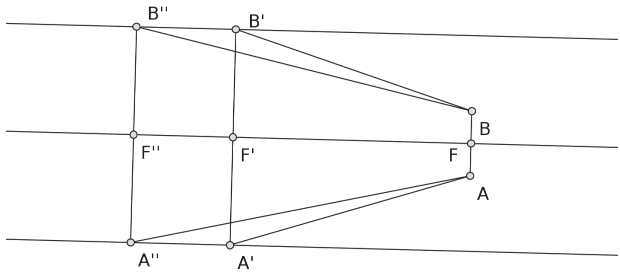
A bizonyítás ötlete az, hogy a húrnégyszög lemmát először csak abban a speciális esetben bizonyítom, amikor van két nem szomszédos egyenlő oldal:

2. Lemma (Szimmetria). *Azon konvex $ABCD$ négyszögek közül, melyekre $AB = a$, $BC = DA = b$ és $CD = c$, a ciklusba írt a legnagyobb területű.*

A szimmetria lemma nagy vonalakban a következőképpen igazolható. Az A, B és a C, D pontpárok két párhuzamos cikluson vannak, nevezetesen azokon, melyeknek két közös tengelye AB és CD felezőmerőlegese. A és B a c_1, C és D a c_2 cikluson legyen, s jelölje c_2-n A' az A-hoz, B' a B-hez legközelebbi pontot. A $\widehat{CD}$ ciklusívet $\widehat{A'B'}$-be c_2 menti csúsztatás viszi, ezért az $ABCD$ és $ABB'A'$ négyszögek területe megegyezik és $A'B' = CD$.



A' és B' definíciója miatt $AA' = BB' < b$, így azon $ABC''D''$ szimmetrikus négyszög területe, melyre $AB = a$, $BC'' = D''A = b$ és $C''D'' = c$ nagyobb. Ezt következő módon igazolom. A két szimmetrikus négyszöget a közös AB oldallal úgy helyezem el, hogy a közös oldalegyenes egy oldalán legyenek. AB oldalfelző pontja F, $A'B'$-é F', $A''B''$-é F'' legyen. $AA' < AA''$ miatt $FF' < FF''$, ezért az $AA''B''B$ négyszög csak akkor nem tartalmazza az $AA'B'B$ négyszöget, ha A az $A'A''$ és FF'' egyenesek közti sávban van. Így csak azt kell belátni, hogy az $AA'A''\triangle$ háromszög területe kisebb, mint az $A'F'F''A''$ Saccheri négyszögé. Ez viszont azért igaz, mert azok a P pontok $A'A''$ négyszögeket tartalmazó oldalán, melyekre az $PA'A''\triangle$ háromszög területe megegyezik a Saccheri négyszögével az $F'F''$ közös szimmetriatengely B'-t és B''-t tartalmazó távolságvonalán vannak, s mivel A a távolságvonal és $A'A''$ között van, kisebb az $AA'A''\triangle$ területe.



Az $ABC''D''$ szimmetrikus négyszög viszont ciklusba írt, hiszen AB, BC'', $C''D''$ és $D''A$ felezőmerőlegesek egy ponton mennek át.

Levezetem a szimmetria lemmából a húrnégyszög lemmát:

Vegyük először is észre, hogy szomszédos oldalhosszakat felcserélve ugyanazt a maximális területet kapjuk, s a megfelelő négyszögek ugyanabba a ciklusba írhatók bele. Ehhez csak a két szomszédos oldalt kell a másodszomszédos csúcsok felezőmerőlegesére való tükrözéssel felcserélni mind a maximális területű esetben, mind a ciklusba írt esetben. Használhatjuk tehát a szimmetria lemmát minden olyan négyszögre, melynek két oldala egyenlő.

Nézzük most adott $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $DA = d$ oldalakkal a ciklusba írt $ABCD$ négyszöget, melyek csúcsai 4 vagy 5 részre darabolják a ciklust, melyek között legfeljebb két végtelen van. Legyen az egyik (korlátos) ív, pl $\widehat{AB}$ felezőpontja F, s legyen az $A'F'B'C'D'$ ötszög maximális területű azon $AFBCD$ ötszögek között, melyekre $AF = FB = A'F' = F'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ és $DA = D'A'$. A kapott konvex sokszögben a húrnégyszög lemmát használhatjuk mind az $A'F'B'C'$, mind az $A'F'B'D'$ négyszögben, tehát C' és D' az A', F' és B' által meghatározott cikluson kell legyen, tehát $AFBCD \cong A'F'B'C'D'$, s így $A'B' = AB = a$. Következésképpen $A'B'C'D'$ az a, b, c, és d oldalhosszúságokkal rendelkező négyszögek közül a legnagyobb területű, hiszen egyébként, a kapott maximális területű négyszög a oldalára ragasztva egy $A'F'B'\triangle$ háromszöggel egybevágó háromszöget, más, azaz nem ciklusba írt, legalább akkora területű ötszöget kapnánk.

Alapvető a következő

2. Tétel (Poligonális Dido). *A legfeljebb $l_1,\ldots,l_n$ pozitív oldalhosszúságokkal rendelkező n-szögek között egyetlen H maximális területű van, melyre a következő két állítás valamelyike teljesül:*

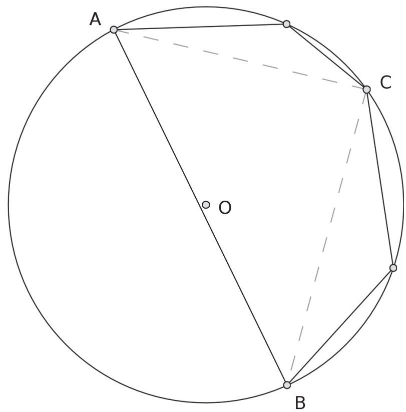
(1) H körbe írható, tartalmazza a kör középpontját, s oldalai a megadott számok.

(2) H körbe írható, leghosszabb oldala körátmérő, mely kisebb a legnagyobb számnál, a többi oldal hossza pedig a többi szám.

E tétel bizonyítása hasonlóan kezdődik, mint Siegel cikkében. Először is a csuklós sokszög tétel miatt H húrsokszög.

Először belátom, hogy körbe írt, és tartalmazza a kör középpontját. Tegyük fel indirekt módon, hogy H ciklusa paraciklus, hiperciklus, vagy olyan kör, aminek középpontját H nem tartalmazza. Jelölje most a a H leghosszabb oldalát, valamint $H(x)$ azt a maximális területű sokszöget, melynek x a leghosszabb oldala, a többi oldala pedig rendre olyan hosszú, mint H-nak a-tól különböző oldalai. Ekkor tehát $H(a)$ és H egybevágó. x-et a-tól kezdve csökkentve kapunk egy olyan $H(a')$ körbe írt sokszöget, amikor az a' a kör átmérője. $H(a)$-t az a felezőpontjára tükrözött képével kiegészítve kapjuk a $H'(a)$ konvex sokszöget. $H(a')$-t az a' felezőpontjára tükrözött képével kiegészítve kapjuk a $H'(a')$ konvex sokszöget. A két $2n-2$-szög oldalai rendre ugyanazok, a második ciklusba (körbe) írt, ezért a csuklós sokszög tétel miatt $H'(a')$ a nagyobb területű, azaz a felekre visszatérve $H(a')$ kisebb területű, mint $H(a)$, pedig $a' < a$ miatt $H(a')$ is teljesíti a poligonális Dido tétel feltételeit.

Most már csak annak az igazolása marad, hogy H nem körátmérő oldalai maximálisak. Legyen tehát AB a H húrsokszög nem körátmérő és nem maximális oldala. H tartalmazza körülírt körének O csúcsát, ezért H-nak van olyan harmadik, C csúcsa, hogy $ABC\triangle$ tertalmazza O-t, de nem az AB oldalán.



Így a csúcsoknál lévő α, β, γ szögekre $\alpha+\beta-\gamma = 2ABO\measuredangle > 0$. A Tételek és lemmák a Dido-tétel bizonyításához című fejezetben található olló lemma miatt így a háromszög AC és BC oldalhosszait rögzítve a háromszög területe a γ szög szigorúan monoton növekvő függvénye. Így viszont H oldalhosszait AB kivételével rögzítve, s ugyancsak rögzítve H nem A-nál, B-nél és C-nél lévő szögeit, a módosított H sokszög területe a C-nél lévő szög szigorúan monoton függvénye, azaz H nem lehetett maximális területű.

2. FEJEZET

A Dido tétel

Legyen adott pozitív számok egy $L(l_1, \ldots, l_n)$ véges sorozata. Ha szakaszok $S(s_1, \ldots, s_n)$ véges sorozatában az i-edik hossza l_i, akkor azt mondjuk, hogy S az L méretekkel rendelkezik.

Az S szakaszrendszer a (hiperbolikus, euklideszi vagy szférikus) síkot poligonálisan összefüggő részekre darabolja. Ezek közül a korlátosak (gömbön a nyílt félgömbbe férők) egyesítését az S által határolt ponthalmaznak nevezzük.

Kimondom a Dido tételt:

3. Tétel (Dido). *Az L méretekkel rendelkező S szakaszrendszer euklideszi és hiperbolikus síkon akkor határolja a legnagyobb területű ponthalmazt, ha az S által határolt H ponthalmazra az alábbiak valamelyike teljesül:*

(1) H körbe írt sokszög, mely tartalmazza a kör középpontját és oldalai az S teljes szakaszai.
(2) H körbe írt sokszög, melynek leghosszabb oldala a körátmérővé rövidített leghosszabb szakasz, míg a többi oldal a többi teljes szakasz S-ből.

A bizonyítás alapja egy úgynevezett festett sokszögekről szóló tétel, melyet a következő fejezetben kimondok.

Ezt követően mutatom meg, hogyan következik belőle a Dido-tétel.

Az ezután következő fejezetben adom meg a festett sokszögekről szóló tétel bizonyítását.

Használom a csuklós sokszög alábbi fogalmát.

1. Definíció (Csuklós sokszög). *$C = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ legyen pozitív számok olyan legalább háromelemű ciklikusan rendezett halmaza, hogy bármelyik kisebb a többi összegénél, s gömbfelületen teljesüljön ezenkívül, hogy összegük kisebb 2π-nél. C oldalú csuklós sokszögnek nevezzük és $J(C)$-vel jelöljük azon konvex n-szögek halmazát, amelynek oldalhosszai pozitív irányban ciklikusan felsorolva éppen az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok.*

Ha π az $1, \ldots, n$ indexek egy permutációja, akkor a $C_\pi = (a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)})$ ciklikusan rendezett halmazhoz tartozó $J(C_\pi)$ csuklós sokszöget a $J(C)$ csuklós sokszög permutációjának nevezzük.

Ezzel a szóhasználattal a csuklós sokszög tétel úgy fogalmazható, hogy minden csuklós sokszög egyetlen húrsokszöget tartalmaz, s ez az egyetlen maximális területű eleme. Nyilvánvaló az is, hogy ha két csuklós sokszög egymás permutációja, akkor maximális területű elemeik egyforma területűek.

Az előző fejezetben ezt a formalizmust azért nem használtam, mert nélkülük az állítások és bizonyításaik követhetőbbek voltak.

3. FEJEZET

Festett t-sokszögek

Szükségünk lesz a sokszögnél kicsit általánosabb t-sokszög fogalmára:

2. DEFINÍCIÓ (t-sokszög). *A páronként legfeljebb egy pontban érintkező sokszögek poligonálisan összefüggő egysítését t-sokszögnek nevezzük, ha az oldalakat a síkból elhagyva, a korlátos (félgömbnél kisebb) poligonálisan összefüggő tartományok éppen a sokszögek belsejei, és az érintkező sokszögek érintkezési pontja mindegyik e pontban érintkező sokszögnek csúcsa. Ekkor a sokszöglemezek érintkezési gráfja fa, és az összes sokszög oldalait egyértelműen rendezhetjük ciklikusan úgy, hogy*

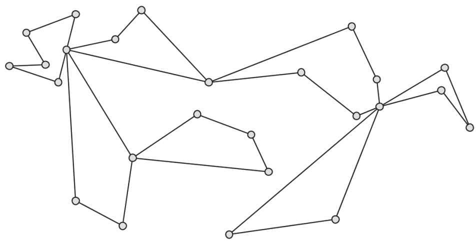
- *egy-egy sokszög oldalai egymást kövessék úgy, hogy rendezésük az adott sokszög pozitív körüljárása legyen, és*
- *minden T érintkezési pontban az onnan kiinduló oldalak T kezdő pontú félegyenesei bármely T-ben csatlakozó oldalpár egy oldalán legyenek.*

A sokszögek oldalai a t-sokszög oldalai, s az előbbi sorrendben szomszédosak a t-sokszög szomszédos oldalai. Ha P_1P_2, P_2P_3,..., P_nP_1 az oldalak ilyen ciklikus sorrendje, akkor a t-sokszöget $S(P_1, \ldots, P_n)$-nel jelöljük. A csúcsok ezen ciklikus sorrendjében az érintkezési pontok annyiszor szerepelnek, ahány sokszög ott érintkezik. Ezeket az egybeeső pontokat az S t-sokszög különböző csúcsainak tekintjük. Abban a T csúcsban, ahol sokszögek érintkeznek és az AT, TB oldalak találkoznak, az S t-sokszög szöge az a TA és TB szárú szög, amelyben a többi T pontba futó oldal T kezdőpontú félegyenese található. Ezt a szöget $ATB\measuredangle$-vel jelöljük. Ha egy csúcs nem érintkezési pont, akkor ot az S t-sokszög szöge a megfelelő részsokszög szöge.

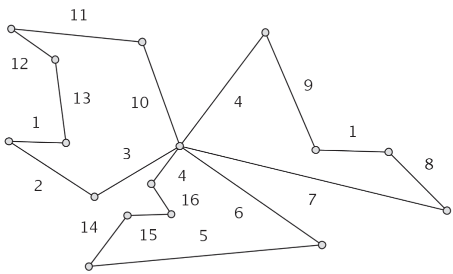
Azokat a sokszögeket, amelyek egyesítéseként a t-sokszög létrejön, a t-sokszög komponenseinek, ezek érintkezési pontjait, melyek a definíció szerint az érintkező sokszögek közös csúcsai, a t-sokszög érintkezési pontjainak, az ebben érintkező sokszögek számát az érintkezési pont fokának nevezzük.

3. DEFINÍCIÓ (Festett t-sokszög). *Rendeljünk egy S t-sokszög oldalaihoz (színeknek nevezett) természetes számokat úgy, hogy az azonos színű oldalak egy egyenesbe esnek, és konvex burkuk a zárt t-sokszöglemez részhalmaza. A t-sokszöget ezzel a színezéssel festett t-sokszögnek nevezzük.*

Az S festett t-sokszög színeinek halmazát $C(S)$-sel, egy $c \in C(S)$ színre a c színű oldalak együttes hosszát $l(c)$-sel, s S valamely e oldalának



színét $c(e)$-vel jelöljük. Az S t-sokszög $c \in C(S)$ színre festett oldalainak számát a c szín rendjének nevezzük és $o(c)$-vel jelöljük. Az e oldal $c(e)$ színének $o(c(e))$ rendjét az e oldal rendjének nevezzük és $o(e)$-vel jelöljük.



Figyeljük meg példánkban, hogy hiába vannak a 4-es és 14-es színű oldalak egy egyenesen, nem lehetnek egyszínűek, mert konvex burkuk kilóg a t-sokszögből, s 12-es és 6-os színű oldal konvex burka hiába t-sokszöglemez-beli szakasz, nem feltétlenül kell egyszínűeknek lenniük.

3. Lemma (t-sokszög egyenlőtlenség). *Bármely F festett t-sokszög bármely s színére az s színű oldalak együttes hossza rövidebb, mint a többi oldal együttes hossza.*

Bizonyítás. Az s színű oldalak konvex burka egy PQ szakasz, amelynek hossza kisebb egyenlő a sokszögvonal P-t és Q-t összekötő mindkét darabjánál, sőt, legalább az egyik darab hosszabb nála, azaz F kerülete $k(F) > 2PQ \geq 2l(s)$, ami triviálisan ekvivalens a lemma egyenlőtlenségével. $\square$

4. Definíció (Festett t-sokszög csuklós sokszögei és húrsokszögei). *Ha* $C(F) = \{1, \dots, k\}$ *az* F *festett t-sokszög színei,* π *pedig ezek egy permutációja, akkor a különböző színű oldalak összhosszaival rendelkező* $J(l(\pi(1)), \dots, l(\pi(k)))$ *csuklós sokszöget az* F *festett t-sokszöghöz tartozó csuklós sokszögnek nevezzük, és azt* $J_\pi(F)$*-fel jelöljük. A* $J_\pi(F)$ *csuklós sokszög húrsokszög elemét* $H_\pi(F)$*-fel jelöljük és az* F *festett t-sokszöghöz tartozó húrsokszögnek nevezzük. Nevezzük a* π*-től független* $t(H_\pi(F)) - t(F)$ *területkülönbséget az* F *festett sokszög jóságának, s jelöljük* $\sigma(F)$*-fel.*

Ezen dolgozat legfontosabb tétele a következő:

4. Tétel (Festett t-sokszög tétel). *Egy* F *festett t-sokszög* $t(F)$ *területe kisebb egyenlő, mint a hozzá tartozó* $H_\pi(F)$ *húrsokszög területe. Egyenlőség pontosan akkor van, ha* F *húrsokszög és minden oldal más színű. Azaz, az* F *festett sokszög jósága* $\sigma(F) \geq 0$*, és egyenlőség akkor van, ha* F *húrsokszög.*

Ennek bizonyítását később adom meg. Most azt mutatom meg, hogy használhatjuk fel a tételt a Dido-sejtés bizonyítására.

4. FEJEZET

A Dido-tétel bizonyítása

5. Tétel (Dido). *Az $s_1,\ldots,s_n$ szakaszok által határolt korlátos S tartomány területe akkor a legnagyobb, ha S olyan körbe írt húrsokszög, mely*

(1) tartalmazza a körközéppontot és oldalai az $s_1,\ldots,s_n$ szakaszok, vagy

(2) a körközéppont a leghosszabb szakaszon van, amely a leghosszabb oldalnál is hosszabb, a többi oldal pedig megegyezik a többi szakasszal.

Az $s_1,\ldots,s_n$ szakaszok ilyen optimális helyzetét Dido-pozíciónak nevezzük.

A t-festett sokszögtételből és a poligonális Dido tételből a Dido-tétel már viszonylag egyszerűen következik, s az eddigieken kívül csak a húrsokszögek következő addíciós tételét kell felhasználni:

6. Tétel (Húrsokszögek addíciós tétele). *Az A húrsokszög oldalai legyenek $a_1,\ldots,a_r$, a B húrsokszög oldalai pedig $b_1,\ldots,b_s$ hosszúak. C legyen húrsokszög $a_1,\ldots,a_r$, $b_1,\ldots,b_s$ oldalhosszakkal, D egy másik húrsokszög a_1+b_1, a_2, $\ldots$, a_r, b_2, $\ldots$, b_s oldalhosszakkal, E pedig egy harmadik húrsokszög a_1+b_1, a_2+b_2, a_3, $\ldots$, a_r, b_3, $\ldots$, b_s oldalhosszakkal. Ekkor az A és B húrsokszögek együttes területe*

$$t(A)+t(B)<t(E)<t(D)<t(C).$$

A tétel bizonyítása a Tételek és lemmák a Dido-tétel bizonyításához című fejezetben található. Most következzék a Dido-tétel bizonyítása:

Bizonyítás. (Dido) Határolják az $s_1,\ldots,s_n$ szakaszok az S ponthalmazt! Egyesítsük azokat a szakaszokat, melyek egy egyenesen vannak és van közös pontjuk, egészen addig, amíg ez lehetséges. Az így keletkező $d_1,\ldots,d_m$ szakaszok egy egyenesen lévő s_i szakaszok egyesítései, egy szakasz nem hosszabb az őt létrehozó szakaszok összhosszánál, és egy s_i csak egy szakaszba olvad bele. Először ezen $D=\{d_1,\ldots,d_m\}$ szakaszhalmazra bizonyítom be a tételt.

E szakaszok ugyanazt az S általános sokszöget határolják, mint az s_i-k, s ez az általános sokszög a diszjunkt $S_1,\ldots,S_N$ t-sokszögek uniója. N-re vonatkozó teljes indukcióval igazolom, hogy S területe a d_i szakaszok Dido-pozíciója esetén a legnagyobb.

- $N=1$ Ekkor fessük a $S=S_1$ t-sokszöget úgy, hogy két oldal pontosan akkor egyszínű, ha egy d_i szakasz része. A festett t-sokszögekre tétel alapján S területe nem nagyobb egy olyan húrsokszögénél, melynek i-edik oldala olyan hosszú, mint az S t-sokszög d_i-re eső oldalainak összhossza, s egyenlőség akkor van, ha S is húrsokszög. Az S húrsokszög i-edik oldala viszont legfeljebb d_i hosszú, így a poligonális Dido tétel alapján S akkor maximális területű, ha a d_i szakaszok Dido-pozícióban vannak.

- $N \to N+1$ Tegyük fel, hogy a Dido-tétel igaz N-re, és tegyük most fel, hogy D a diszjunkt $S_1,\ldots,S_{N+1}$ t-sokszögeket határolja.

  Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai az $S_1,\ldots,S_{N+1}$ t-sokszögek, s két t-sokszög közt akkor van él, ha létezik olyan $d \in D$ szakasz mely összeköti lemezeiket. G-ben nincs kör, hiszen az egy körhöz tartozó t-sokszögek nem diszjunktak. Így viszont van legfeljebb elsőfokú csúcsa. Legyen S_1 egy ilyen legfeljebb első fokú csúcs.

  Ha két diszjunkt t-sokszöglemezt két szakasz is összekötne, akkor a két t-sokszöglemez és a két összekötő szakasz egyetlen t-sokszöglemezt határolna. Így tehát az S_1 t-sokszöglemezt legfeljebb egy $d \in D$ szakasz köti össze a többi t-sokszöglemezzel.

  Először tegyük fel, hogy nincs ilyen összekötő szakasz. Ekkor a D szakaszhalmaz felbontható a D_1 és D_2 halmazok $D = D_1\dot{\cup}D_2$ diszjunt uniójára úgy, hogy D_1 az S_1 t-sokszöget határolja, D_2 pedig a többit. Az indukciós feltétel miatt van olyan H_1 és H_2 húrsokszög, hogy H_1 oldalai legfeljebb olyan hosszúak, mint D_1 elemei, hogy H_2 oldalai legfeljebb olyan hosszúak, mint D_2 elemei, $t(S_1) \leq t(H_1)$ és $t(S_2) \leq t(H_2)$. A húrsokszögek addíciós tétele miatt van olyan H húrsokszög, melynek oldalai legfeljebb olyan hosszúak, mint $D = D_1\dot{\cup}D_2$ elemei, és $t(S) = t(S_1)+t(S_2) \leq t(H_1)+t(H_2) < t(H)$, azaz D nem a maximális területű tartományt határolja.

  Végül az marad, hogy az egyetlen d szakasz köti össze az elsőfokú csúcs S_1 festett sokszöget a többivel, azok közül is egyetlen eggyel, mondjuk S_2-vel. Mivel d határolja S_1-et és S_2-t is, ezért mind a $d \cap S_1$, mind a $d \cap S_2$ halmaz szakasz. Így d-t kettévághatjuk az a és b szakaszra úgy, hogy $d \cap S_1 \subset a$ és $d \cap S_2 \subset b$.

  Ekkor a $D \setminus \{d\} \cup \{a, b\}$ szakaszhalmaz felbontható a D_1 és D_2 halmazok $D = D_1\dot{\cup}D_2$ diszjunt uniójára úgy, hogy $a \in D_1$, $b \in D_2$, D_1 az S_1 t-sokszöget határolja, D_2 pedig a többit. Az indukciós feltétel miatt van olyan H_1 és H_2 húrsokszög, hogy H_1 oldalai legfeljebb olyan hosszúak, mint D_1 elemei, hogy H_2 oldalai legfeljebb olyan hosszúak, mint D_2 elemei, $t(S_1) \leq t(H_1)$ és $t(S_2) \leq t(H_2)$. A húrsokszögek addíciós tétele és $d = a + b$ miatt van olyan H húrsokszög, melynek oldalai legfeljebb olyan hosszúak, mint $D = D_1 \dot\cup D_2 \cup \{d\}$ elemei, és $t(S) = t(S_1) + t(S_2) \leq t(H_1) + t(H_2) < t(H)$, azaz D nem a maximális területű tartományt határolja.

$\square$

5. FEJEZET

A festett t-sokszög tétel bizonyítása

Az egész fejezet a festett t-sokszög tétel bizonyításából áll, amely egy összetett indirekt bizonyítás.

5. DEFINÍCIÓ (Festett t-sokszög vágása, a vágás erőssége). *Az F festett t-sokszög pozitív körüljárás szerint egymás utáni BC és AB oldalai csatlakozzanak B-ben konvex szögben. F-ből egy F' festett t-sokszöget készítünk a következő három mód valamelyikével:*

(1) Ha AB színe nem színe más oldalnak, s $B'' \in (BC)$ a (BC) nyílt szakasz olyan pontja, hogy az (AB'') nyílt szakasz az F belsejében halad, akkor S-ből az AB, BC oldalakat elhagyva, AB'' és $B''C$ oldalakat hozzávéve az F' festett t-sokszöget úgy kapjuk, hogy AB'' megkapja AB színét, $B''C$ pedig BC-ét.

(2) Az előzőhöz hasonlóan, BC színe nem színe más oldalnak, s $B' \in (AB)$ az (AB) nyílt szakasz olyan pontja, hogy az $(B'C)$ nyílt szakasz az F belsejében halad, akkor S-ből az AB, BC oldalakat elhagyva, AB' és $B'C$ oldalakat hozzávéve az F' festett t-sokszöget úgy kapjuk, hogy AB' megkapja AB színét, $B'C$ pedig BC-ét.

(3) Ha AB és BC színe is színe más oldalnak, $B' \in (AB)$ és $B'' \in (BC)$ az (AB) és (BC) nyílt szakaszok olyan pontjai, hogy az $(B'B'')$ nyílt szakasz az F belsejében halad, akkor F-ből az AB, BC oldalakat elhagyva, AB', $B'B''$ és $B'C$ oldalakat hozzávéve az F' festett t-sokszöget úgy kapjuk, hogy AB' megkapja AB színét, $B''C$ pedig BC-ét, $B'B''$ pedig saját, minden más oldalétól különböző színt kap.

Ekkor az (F, F') párt az F sokszög 1-es, 2-es illetve 3-as típusú vágásának, az $f(F, F') = \sigma(F) - \sigma(F') = (t(H_\pi(F)) - t(F)) - (t(H_\pi(F')) - t(F'))$ mennyiséget pedig az (F, F') vágás erősségének nevezzük és $f(F, F')$-vel jelöljük.

Az (F, F') vágást adott F festett sokszög esetén jelöljük az első két esetben $ABC \to AB'C$-vel, a harmadik esetben $ABC \to AB'B''C$-vel is.

$f(F, F') < 0$ esetben a vágást negatívnak, $f(F, F') > 0$ esetén pedig pozitívnak nevezzük.

7. TÉTEL (Vágás). *Az F festett t-sokszög $C(F)$színein π legyen olyan permutáció, hogy az F-nek B nem érintkezési pont csúcsában csatlakozó AB és BC oldalakkal egyszínű oldalak együttes hosszaival*

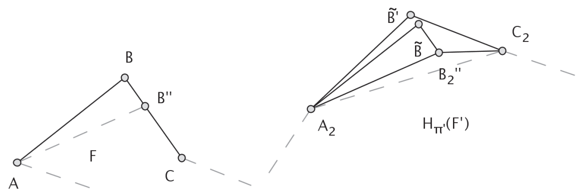
egyenlő hosszú A_1B_1 és B_1C_1 oldalak induljanak ki a $H_\pi(F)$ húrsokszög B_1 csúcsából.

Legyen $B\measuredangle < B_1\measuredangle$. Ekkor minden $\epsilon > 0$ pozitív számra:

(1) *Ha AB színe nem színe más oldalnak, akkor $\exists B'' \in (BC)$, hogy $BB'' < \epsilon$ és $(F,F') = ABC \to AB''C$ egy 1-es típusú negatív vágás.*
(2) *Ha BC színe nem színe más oldalnak, akkor $\exists B' \in (AB)$, hogy $BB' < \epsilon$ és $(S,S') = ABC \to AB'C$ egy 2-es típusú negatív vágás.*
(3) *Ha AB és BC színe is előfordul más oldalnál, akkor $\exists B' \in (AB)$, $\exists B'' \in (BC)$, hogy $B'B+BB'' < \epsilon$ és $(F,F') = ABC \to AB'B''C$ egy 3-as típusú negatív vágás.*

Bizonyítás. B nem érintkezési pontja a t-sokszögnek, így feltehető, hogy ϵ olyan kicsi, hogy az első esetben $B'B < \epsilon$, a második esetben $B''B < \epsilon$, illetve a harmadikban $B'B+BB'' < \epsilon$ biztosítsa, hogy (AB''), $B'C)$ és $(B'B'')$ az S belsejében haladjon, azaz (F,F') vágás legyen.

(1) Legyen F' színein π' olyan permutáció, hogy a $H_{\pi'}$ húrsokszög szomszédos A_2, B_2'' és C_2 csúcsaira $A_2B_2'' = AB''$, míg $B_2''C_2$ hossza legyen S'-ben a $B''C$-vel egyszínű oldalak együttes hossza. Ragasszuk az $AB''B\triangle$ háromszög egybevágó $A_2B_2''\tilde{B}\triangle$ másolatát a $H_{\pi'}(F')$ húrsokszöghöz kívülről.



A BB'' távolságnak F', $H_{\pi'}(F')$ és $AB''B\triangle$ minden szöge és távolsága folytonos függvénye. Így $BB'' \to 0$ esetén $C_2B_2''A_2\measuredangle \to B_1\measuredangle$ és $AB''B\measuredangle = A_2B_2''\tilde{B}\measuredangle \to ABC\measuredangle$, így elegendően kicsiny ϵ esetén az $A_2C_2B_2''\tilde{B}$ négyszögnek B_2''-ben konkáv szöge van.

A konkáv négyszög lemma szerint e négyszög területénél nagyobb annak az $A_2C_2\tilde{B}'\triangle$ háromszögnek a területe, melyre $A_2\tilde{B}' = A_2\tilde{B}$ és $C_2\tilde{B}' = C_2B_2'' + B_2''\tilde{B}$, és az A_2C_2 egyenes elválasztja $\tilde{B}'$-t a húrsokszögtől. Így az a $\tilde{F}$ sokszög, melynek oldalai a C_2B_2''-t és $B_2''A_2$-t kivéve a $H_{\pi'}$ húrsokszög oldalai plusz a $C_2\tilde{B}'$ és $\tilde{B}'A_2$, az F festett sokszöghöz tartozó $J_\pi(F)$ csuklós sokszög eleme, és

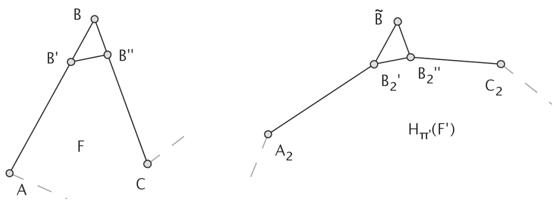
$$t(H_\pi)-t(F) \geq t(\tilde{F})-t(F) > t(H_{\pi'}(F')+t(A_2B_2''B\tilde{B}\triangle)-t(F) = t(H_{\pi'}(F')-t(F'),$$

tehát az (F, F') vágás negatív.

(2) Az előző okoskodás szimmetrikus párja.

(3) Legyen F' színein π' olyan permutáció, hogy a $H_{\pi'}$ húrsokszög szomszédos A_2, B_2', B_2'' és C_2 csúcsaira $B_2'B_2'' = B'B''$, AB_2' hossza az S'-ben AB'-vel egyszínű oldalak együttes hossza, míg $B_2''C_2$ hossza az S'-ben $B''C$-vel egyszínű oldalak együttes hossza.

Ragasszuk az $B'B''B\triangle$ háromszög egybevágó $B_2'B_2''\tilde{B}\triangle$ másolatát a $H_{\pi'}(F')$ húrsokszöghöz kívülről.



A $B'B$ és BB'' távolságpárnak S', $H_{\pi'}(F')$ és $B'B''B\triangle$ minden szöge és távolsága folytonos függvénye. Így egyrészt, elegendően kicsiny $\epsilon > 0$-ra $BB' + B''B < \epsilon$ esetén, az $A_2C_2B_2''\tilde{B}B_2'$ ötszög B_2' és B_2'' beli szögeinek összege $B_2'\measuredangle + B_2''\measuredangle > 2\pi$. Másrészt BB' függvényében, megszabva $B''B = \frac{\epsilon}{2} - BB'$-t, $\lim_0 B_2''\measuredangle < \pi$, $\lim_0 B_2'\measuredangle > \pi$, $\lim_{\frac{\epsilon}{2}} B_2''\measuredangle > \pi$ és $\lim_{\frac{\epsilon}{2}} B_2'\measuredangle < \pi$. Van tehát olyan $x \in (0, \epsilon 2)$ szám, hogy $BB' = x$-re $B_2'\measuredangle = \pi$. Innentől at (1) eset szerint lehet okoskodni, mivel most, ahhoz hasonlóan, az $A_2C_2B_2''\tilde{B}$ egy B_2''-ben konkáv négyszög.

□

Elsőnek olyan esetre bizonyítjuk a festett t-sokszögekre vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenséget, amikor a t-sokszög egyetlen sokszög, s ezt is csak abban a gyengébb alakban, hogy minden festett sokszög jósága legalább 0. A felhasznált lemmák bizonyítását az áttekinthetőség kedvéért a fejezet végére hagyom.

A bizonyítás indirekt. Tegyük tehát fel, hogy van ellenpélda, tehát olyan F festett sokszög, melynel jósága negatív. Az ilyen ellenpéldákról szól az alábbi

4. Lemma (Konvex csúcs). *Az olyan ellenpéldák között, ahol a konkáv szögek száma minimális, legyen F-ben minimális a csúcsok száma. Ekkor*

(1) F-ben nincs egyenesszögű csúcs,

(2) két egymásutáni (nem feltétlenül szomszédos) konkáv csúcs közötti határszakasz konvex burkának belsejében F-nek nincs csúcsa,

(3) két egymásutáni (nem feltétlenül szomszédos) konkáv csúcs között legfeljebb két konvex van, és

(4) ha F' olyan ellenpélda, melynek konkáv csúcsai éppen F konkáv csúcsai és a többi csúcs is F-ben van, akkor van olyan F'' ellenpélda, melynek konkáv csúcsai éppen F konkáv csúcsai, a többi csúcs is F'-ben van, jósága legfeljebb F' jósága, azaz $\sigma(F'') \leq \sigma(F') < 0$, nincs benne egyenesszögű csúcs, ha két kollineáris oldalának konvex burka F''-beli, akkor egyszínűek, és két egymásutáni konkáv csúcs között legfeljebb két konvex van.

Használjuk ezt a lemmát a következő módon! Kiindulunk egy olyan F ellenpéldából, amiben minimális elsősorban a konkáv szögek, s másodsorban a csúcsok száma. F konkáv csúcsai pozitív irányban sorolva legyenek $R_1,\ldots,R_r,R_{r+1} \equiv R_1$. Legyen Φ azon F' festett sokszögek halmaza, melyek konkáv csúcsai éppen F konkáv csúcsai, és $F' \subset F$. Legyen $\sigma = \inf_{F' \in \Phi} \sigma(F')$ ezen festett sokszögek jóságának infímuma. $F \in \Phi$ ellenpélda, így $\sigma \leq \sigma(F) < 0$.

A konvex csúcs lemma miatt kiválasztható Φ elemeiből festett sokszögek egy olyan (F_n) sorozata, melynek jósága σ-hoz tart, F_n bármely két egymásutáni konkáv csúcsa között legfeljebb két konvex csúcs van, ha két kollineáris oldalának konvex burka F_n-beli, akkor egyszínűek, egyenesszöge nincs, következésképp a csúcsszám legfeljebb $3r$, ahol r az F konkáv szögeinek száma.

A sorozat ritkításával így elérhető, hogy a kapott (ugyanúgy jelölt) (F_n) sorozat

- F_n elemében az R_i és R_{i+1} egymásutáni konkáv csúcsok közötti konvex csúcsok $r_i \in \{0,1,2\}$ száma nem függ n-től, a $P^n_{i,1}$, …, P^n_{i,r_i} konvex csúcsok $r_i \in \{0,1,2\}$ száma
- az R_i és R_{i+1} konkáv csúcsok közti j-edik oldal színe mindegyik F_n festett sokszögben ugyanaz legyen, ha $i = 1,\ldots,r$ és $j = 0,\ldots,r_i$,
- és az F_n sokszögek R_i és R_{i+1} konkáv csúcsa közti j-edik konvex csúcsait $P_{i,j}$-vel jelölve $(P^n_{i,j})$ sorozat konvergens, tartson $P_{i,j}$-hez.

A kapott $R_1P_{1,1}\ldots P_{1,r_1}\ldots\ldots R_rP_{r,1}\ldots P_{r,r_r}$ zárt töröttvonal oldalait fessük F_n megfelelő oldalainak színére. A 0 hosszú oldalakat elhagyva egy L zárt festett töröttvonalat kapunk.

Tegyük először fel, hogy L (festett) sokszög. F_n egy $c \in C(F_1)$ színére $l_n(c)$ legyen az F_n festett sokszög c színű oldalainak együttes hossza, míg legyen $l(c)$ az L limesz-sokszög c színű oldalainak együttes hossza. A csúcsok konvergenciája miatt $l_n(c) \to l(n)$, $t(F_n) \to t(L)$, és így $\sigma(L) = \lim \sigma(F_n) = \sigma$.

L tehát ellenpélda, amiknek konkáv csúcsai csak F konkáv csúcsai lehetnek, s így, mivel az ellenpéldáknak nem lehet kevesebb konkáv csúcsa, L konkáv csúcsai éppen F konkáv csúcsai. Negatív vágása ezért Φ-nek egy σ-nál kisebb jóságú elemét eredményezné, ami ellentmond σ definíciójának

Az alábbi lemma viszont éppen ezt biztosítja.

5. LEMMA (Hegyes csúcs). *Ha az euklideszi vagy hiperbolikus sík S festett t-sokszöge nem húrsokszög, de területe legalább akkora, mint a hozzátartozó húrsokszögé, akkor van olyan V csúcsa, amiben hegyes, azaz nem érintkezési pont, és ha a V-ben találkozó két oldal c_1 és c_2 színű, akkor az olyan S-hez tartozó H húrsokszögben, melynél az $l(c_1)$ és $l(c_2)$ hosszú oldalak egy V' csúcsban találkoznak, V'-ben nagyobb szög van, mint az S festett sokszög V csúcsában.*

Az első eset tehát ellentmondásra vezetett.

Marad tehát az az eset, amikor L nem sokszög. A konvex csúcs lemma alapján az F sokszög R_i és R_{i+1} konkáv csúcsai közti konvex csúcsok, ha vannak, az R_{i+1} és R_i konkáv csúcsokkal kiegészítve egy K_i konvex sokszöget határoznak meg, melynek belsejében nincs csúcs. Ha nincsenek konvex csúcsok, akkor K_i szakasszá fajul. F_n definíciója miatt viszont F_n-ek $R_i, P_{i,1}, \ldots, P_{i,r_i}, R_{i+1}$ egymásutáni csúcsai $r_i \geq 1$ esetén a konvex $K_i^n \subset K_i$ sokszög csúcsai. Ha $r_i = 0$, akkor K_i^n szakasszá fajul.

Így, ha az L zárt töröttvonal $P_{i,j} = \lim P_{i,j}^n$ csúcsa nincs a R_i és R_{i+1} konkáv csúcsokat összekötő szakaszon, akkor a belőle kiinduló (nem 0) oldalak konvex szöge tartalmazza az $R_i P_{i,j} R_{i+1}$ konvex szöget, amely $P_{i,j} \in K_i$ miatt nem nullszög.

Így viszont L csak akkor nem sokszög, ha valamely $i \in \{1, \ldots, r\}$-re

- $r_i \geq 1$,
- $P_{i,j} \in R_i R_{i+1}$, ha $(1 \leq j \leq r_i)$
- és van az $(R_i R_{i+1})$ nyílt szakaszon egy R_j konkáv csúcsa F-nek.

Ekkor az F sokszög R_j csúcsában lévő konkáv szög f szögfelező félegyenese $F_n \subset F$ miatt mindegyik egyrészt két konvex szögre vágja F_n itteni konkáv szögét is, és K_i^n-beli $[R_j V^n]$ maximális kezdőszakaszainak hossza 0-hoz tart. Ez az $[R_j V^n]$ szakasz az F_n festett sokszöget F_n' és F_n'' festett sokszögekre vágja, ahol minden oldal illetve a V^n végű két oldaldarab megtartja eredeti színét, a 0-ra zsugorodó $[R_j V^n]$ oldal pedig egy saját színt kap. Mivel $F_n \in \Phi$, ezért F_n'-ben és F_n''-ben legfeljebb két közös szín van, $[R_j V^n]$ színe és azon oldalak közös színe, melyek konvex burka olyan szakasz az $R_i R_{i+1}$ egyenesen, mely F_n-ben fut és tartalmazza R_j-t. Mivel pedig F_n'-ben és F_n''-ben legalább eggyel kevesebb konkáv csúcs van, ezért egyikük sem ellenpélda.

A hozzájuk tartozó $H_{\pi'}(F_n')$ és $H_{\pi''}(F_n'')$ sokszögek együttes területe ezért

$$t(H_{\pi'}(F_n')) + t(H_{\pi''}(F_n'')) \geq t(F_n') + t(F_n'') = t(F_n),$$

és egy olyan H_n húrsokszögnek a területe, melynek oldalai a két részsokszög színeihez tartozó össz oldalhosszak, a húrsokszögek addíciós tétele miatt

$$t(H_n) > t(H_{\pi'}(F'_n)) + t(H_{\pi''}(F''_n)).$$

Viszont H_n oldalhosszai $H_\pi(F_n)$ oldalhosszaitól csak annyiban különböznek, hogy H_n-nek van még egy $2R_jV^n$ hosszú oldala is. Ez viszont 0-hoz tart, így

$$\lim t(H_n) = \lim t(H_\pi(F_n)) = \lim t(F_n) + \sigma < \lim t(F_n),$$

ami ellentmond az előző két egyenlőségből adódó

$$t(H_n) > t(F_n)$$

egyenlőtlenségnek. Ezzel euklideszi és hiperbolikus síkon a festett sokszögekre vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenséget a lemmákból levezettük.

Most festett t-sokszögekre bizonyítjuk az izoperimetrikus egyenlőtlenség gyenge alakját, tehát hogy minden festett t-sokszög jósága legalább 0.

Legyen F egy tetszőleges t-festett sokszög. Legyen $\epsilon > 0$ olyan pozitív szám, mely kisebb az F különböző csúcspontjai közt lévő legkisebb távolság felénél. Az érintkezési csúcsok körüli konkáv szögek csúcstól kezdődő ϵ szárhosszúságú darabjait hagyjuk el, s az egy szöghöz tartozó csonka szárvégeket páronként (kívül) kössük össze. Az összekötő darabok mind kapjanak saját színt, a lerövidített oldalak őrizzék meg színüket. Az F festett t-sokszögből így egy F_ϵ festett sokszöget kaptunk. Ezekre már beláttuk az izoperimetrikus egyenlőtlenség gyenge változatát, azaz az F_ϵ festett sokszöghöz tartozó minden $H_{\pi'}(F_\epsilon)$ húrsokszög területére

$$t(H_{\pi'}(F_\epsilon)) \geq t(F_\epsilon),$$

viszont így $\epsilon \to 0$ esetén az F-hez tartozó $H_\pi(F)$ húrsokszög területe

$$t(H_\pi(F)) = \lim t(H_{\pi'}(F_\epsilon)) \geq \lim t(F_\epsilon) = t(F).$$

Következzen a kívánt erős alak bizonyítása:

A gyenge alak bizonyítása után már csak azt kell belátni, hogy ha az F festett t-sokszög ugyanolyan területű, mint a hozzátartozó $H_\pi(F)$ húrsokszögé, akkor maga is húrsokszög.

Indirekt módon tegyük tehát fel, hogy F nem húrsokszög. Ekkor a hegyes csúcs lemma biztosítja, hogy van rajta (F, F') pozitív vágás, azaz F' nem felelne meg a gyenge alaknak sem.

Következzen újra a konvex-csúcs lemma és bizonyítása:

6. Lemma (Konvex csúcs). *Az olyan ellenpéldák között, ahol a konkáv szögek száma minimális, legyen F-ben minimális a csúcsok száma. Ekkor*

(1) F-ben nincs egyenesszögű csúcs,
(2) két egymásutáni konkáv csúcs közötti határszakasz konvex burkának belsejében F-nek nincs csúcsa,
(3) két egymásutáni konkáv csúcs között legfeljebb két konvex van, és

(4) *ha F' olyan ellenpélda, melynek konkáv csúcsai éppen F konkáv csúcsai és a többi csúcs is F-ben van, akkor van olyan F'' ellenpélda, melynek konkáv csúcsai éppen F konkáv csúcsai, a többi csúcs is F'-ben van, jósága legfeljebb F' jósága, azaz $\sigma(F'') \leq \sigma(F') < 0$, nincs benne egyenesszögű csúcs, ha két kollineáris oldalának konvex burka F''-beli, akkor egyszínűek, és két egymásutáni konkáv csúcs között legfeljebb két konvex van.*

Bizonyítás. A bizonyítás az első három esetben indirekt, és egymásra épül.

(1) Egyesítve az egyenesszögű csúcsban találkozó két oldalt, s egyformára változtatva a színüket, s az eddig velük egyszínű oldalak színét, olyan F-fel egyező területű F' festett sokszöget kapnánk, ami a minimálitás miatt nem ellenpélda: $t(H_{\pi'}(F')) \geq t(F')$, viszont $H_{\pi'}$-ben "eltörve" az egyesített két oldalt, olyan S sokszöget kapnánk, melynek oldalhosszai rendre megegyeznek az F egy-egy színű oldalainak összhosszával, s nem húrsokszög, azaz az ugyanilyan oldalhosszakkal rendelkező $H_\pi(F)$ húrsokszög területe

$$t(H_\pi(F)) > t(S) = H_{\pi'}(F) \geq t(F),$$

azaz $\sigma(F) > \sigma(S)$, és így F nem lenne ellenpélda.

(2) Legyen a P_0 és P_m csúcsok közti $P_0P_1 \dots P_m$, csupa konvex csúcson átmenő töröttvonal konvex burkának belsejében F valamelyik, esetleg köztük lévő csúcsa, a az ilyen tulajdonságú töröttvonalak közül ennek legyen minimális oldalszáma. Könnyen látható, hogy ekkor $P_0P_1 \dots P_m$ a konvex burok extremális pontjai, s F-nek egy másik, mondjuk P csúcsa a belső pont. P-ről feltehetjük, hogy a belső pontok közül P-ben minimális a $P_1P_0P\measuredangle$ szög, s az ilyenek közt is P van legközelebb P_0-hoz.

Ekkor az egyedi színnel színezett $[P_1P]$ szakasz két olyan F_1 és F_2 festett sokszögre vágja F-et, melynek P_1P az egyetlen közös oldala, annak színe az egyetlen közös szín, legfeljebb annyi konkáv szögük van, mint F-nek és kevesebb csúcsuk van, mint F-nek, következésképp egyikük se ellenpélda.

Ha F_1 és F_2 valamelyike ellenpélda, készen vagyunk. Tegyük tehát fel, hogy a hozzájuk tartozó $H_{\pi_1}(F_1)$ és $H_{\pi_2}(F_2)$ húrsokszögek területére $t(H_{\pi_1}(F_1)) \geq t(F_1)$ és $t(H_{\pi_2}(F_2)) \geq t(F_2)$. Helyezzük el a két húrsokszöget, hogy a P_1P hosszúságú oldalak egybeessenek, s a két húrsokszög az oldalegyenes két oldalán legyen. Így, elhagyva a közös oldalt, olyan sokszöget kapunk, mely egy F-hez tartozó $J_\pi(F)$ csuklós sokszög eleme, s ezek közül a húrsokszög a maximális területű, tehát

$$t(H_\pi(F)) \geq t(H_{\pi_1}(F_1)) + t(H_{\pi_2}(F_2)) \geq t(F_1) + t(F_2)$$

és F ellenpéldasága miatt

$$0 > \sigma(F) \geq \sigma(F_1) + \sigma(F_2),$$

ami ellentmond annak, hogy F_1 és F_2 egyike se ellenpélda.

(3) Tegyük most fel, hogy F-ben A, B és C három szomszédos konvex csúcs, és X az A előtti, Y pedig a C utáni szomszédos csúcs. Az előző pont alapján $XABCY$ konvex ötszög, aminek belsejében F-nek nincs csúcsa, így az egyedi színnel színezett $[AC]$ szakasz F-et F_1 és F_2 két festett sokszögre vágja, melynek AC az egyetlen közös oldala, annak színe az egyetlen közös szín, legfeljebb annyi konkáv szögük van, mint F-nek és kevesebb csúcsuk van, mint F-nek. Innentől az okoskodás ugyanaz, mint az előző pontban.

(4) Legyen most $F' \subset F$ olyan ellenpélda, melynek konkáv csúcsai éppen F konkáv csúcsai. Az (1)-es pont hasonlóan egyesíthetjük F' egyenesszögben csatlakozó oldalait és a hozzá tartozó színeket, valamint egyesíthetjük azon oldalak színekeit is, melyek konvex burka olyan szakasz, mely F'-ben van. Ezekkel csökken a jóság. Feltehetjük tehát, hogy már F'-nek sincs egyenesszöge, és egyszínű bármely két oldal, melyek konvex burka F'-ben lévő szakasz. Ha két egymásutáni konkáv csúcs között van három szomszédos konvex csúcs, A, B és C, akkor a (3)-as ponthoz hasonlóan levágva belőle az $ABC\triangle$ háromszöget a saját színre festett AC szakasszal, kapjunk egy S festett sokszöget egy hozzátartozó H húrsokszöggel. A közös AC szakasznál összeragasztva H-t és a háromszöget, most is $J_\pi(F)$ elemét kapjuk, aminek területe nem nagyobb $H_\pi(F)$ területénél, tehát

$$\sigma(F) = H_\pi(F) - t(F) \geq t(H) + t(ABC\triangle) - t(F) = \sigma(S).$$

E lépést addig alkalmazva, amíg lehet, a kívánt F''-t kapjuk.

$\square$

Következzen újra a hegyes-csúcs lemma és bizonyítása euklideszi és hiperbolikus síkon. Fölhívom a figyelmet, hogy ez az egyetlen részlete a Dido-tétel bizonyításának, amely kihasználja, hogy nem gömbfelületen vagyunk.

7. Lemma (Hegyes csúcs). *Ha az euklideszi vagy hiperbolikus sík S festett t-sokszöge nem húrsokszög, de területe legalább akkora, mint a hozzátartozó húrsokszögé, akkor van olyan V csúcsa, amiben hegyes, azaz nem érintkezési pont, és ha a V-ben találkozó két oldal c_1 és c_2 színű, akkor az olyan S-hez tartozó H húrsokszögben, melynél az $l(c_1)$ és $l(c_2)$ hosszú oldalak egy V' csúcsban találkoznak, V'-ben nagyobb szög van, mint az S festett sokszög V csúcsában.*

Bizonyítás. Tekintsük az S festett t-sokszög $C(S)$ ciklikusan rendezett színeinek különböző π permutációihoz tartozó $H_\pi(S)$ húrsokszögeket. A húrsokszögek köré írt ciklusok egybevágók, s pozitív körüljárást tekintve a $c \in C(S)$ színhez tartozó $l(c)$ hosszú irányított A_cB_c oldalegyenest minden π-re ugyanaz az A_c kezdőpont körüli $c\measuredangle \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ szögű forgatás viszi a ciklus A_c-n átmenő irányított tengelyébe. Ilymódon, ha valamely két $c_1, c_2 \in C(S)$ színre egy π permutációnál $H_\pi(S)$-ben az $l(c_1)$ és $l(c_2)$ hosszú oldalak a V' csúcsban csatlakoznak, akkor ott a húrsokszög szöge $V'\measuredangle = c_1\measuredangle + c_2\measuredangle$.

Irányítsuk pozitívan az S festett t-sokszöget is, s eszerint tekintsük minden V csúcsában a csatlakozó oldalak elfordulásának $V^t\measuredangle \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ szögét. Ezeknek $turn(S)$ összege euklideszi síkon 2π, hiperbolikus síkon ennél a $t(S)$ területtel nagyobb. Ugyanezt a $H_\pi(S)$ húrsokszögre elismételve S ellenpélda voltát használva Mind euklideszi, mind hiperbolikus síkon

$$turn(H_\pi(S)) \leq turn(S).$$

S festett t-sokszögünk ellenpélda, ezért nemcsak elsőrendű színei vannak, így van konkáv szöge, ahol az elfordulás negatív. Ha egy érintkezési pont $k(\geq 2)$-ször szerepel csúcsként és e pontban a külső szögek összege $\chi(< 2\pi)$, akkor ugyanitt az elfordulások összege $\tau = \chi - k\pi < 0$. Így tehát a nem érintkezési pont konvex csúcsok K halmazán az elfordulások összege

$$\sum_{V \in K} V^t\measuredangle > turn(S) \geq turn(H_\pi(S)).$$

Kihasználva, hogy minden $c \in C(S)$ színre $H_\pi(S)$-ben pontosan egy hozzátartozó oldal van

$$turn(H_\pi(S)) = 2 \sum_{c \in C(S)} \left(\frac{\pi}{2} - c\measuredangle\right).$$

Az irányított S festett t-sokszög $V \in K$ nem érintkezési pont konvex csúcsában legyen $c^-(V)$ a V előtti, $c^+(V)$ pedig a V utáni oldal színe. S minden V konvex csúcsában két különböző színű oldal csatlakozik, és minden szín legfeljebb kétszer, az ilyen színű oldalak konvex burkuk szakaszának két végpontjában szerepel konvex csúcsban, tehát

$$\sum_{V \in K} V^t\measuredangle > 2 \sum_{c \in C(S)} \left(\frac{\pi}{2} - c\measuredangle\right) \geq \sum_{V \in K} \left(\pi - c^-(V)\measuredangle - c^+(V)\measuredangle\right).$$

Így viszont van olyan $V \in K$ konvex csúcsa S-nek, hogy ennek $V\measuredangle$ szögére

$$V\measuredangle = \pi + V^t\measuredangle < c^-(V)\measuredangle - c^+(V)\measuredangle,$$

azaz S-nek a V csúcsa hegyes. □

6. FEJEZET

Tételek és lemmák a Dido-tétel bizonyításához

6. Definíció (Olló). *Azon háromszögek halmazát, amiknek van a és b hosszú oldala, (a, b) ollónak nevezzük, és $O(a, b)$-vel jelöljük. Elemeit egybevágóság erejéig meghatározza a két oldal szöge, melyet az adott elemben az olló nyílásszögének nevezünk. Az olló γ nyílásszögű elemeiben a harmadik oldal hosszát $c(\gamma)$-val, az a hosszú oldallal szemközti szöget $\alpha(\gamma)$-val, a b hosszú oldallal szemközti szöget $\beta(\gamma)$-val, a háromszög területét $t(\gamma)$-val jelöljük.*

Ebben a fejezetben az (a, b) olló elemeinek egybevágó példányait úgy veszem fel, hogy a b hosszú oldal a fix CA szakasz, az a hosszú oldal az A csúccsal szemközt van, a harmadik csúcs a γ nyílásszög függvényében $B(\gamma)$, és a C, A, $B(\gamma)$ csúcsok sorrendje pozitív.
Olló tételként ismert a következő

8. Tétel (Olló). *Állandó görbületű felületen az (a, b) ollóban a $\gamma \mapsto c(\gamma)$ függvény szigorúan monoton növő.*

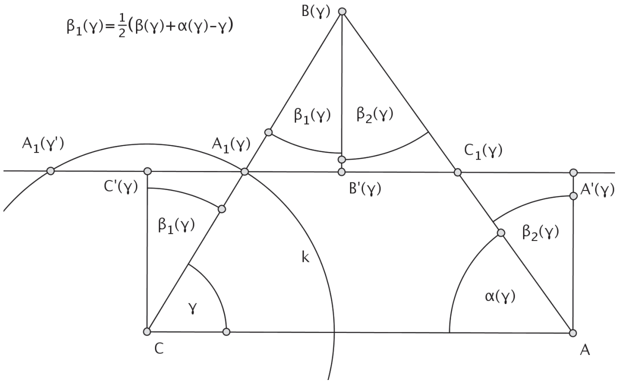
Az olló elemeinek területéről szól a következő lemma:

8. Lemma (Olló területe). *Az (a, b) ollóban a γ nyílásszög $t(\gamma)$ területfüggvényére:*

(1) Gömbfelületen $a + b \geq \pi$ esetén
  - *$t : (0, \pi) \to \mathbb{R}^+$ szigorúan monoton nő.*
  - *$\forall\gamma \in (0, \pi)(\gamma < \alpha(\gamma) + \beta(\gamma))$.*

(2) Egyébként van olyan $\gamma_0 \in (0, \pi)$ nyílásszög, ahol $\gamma_0 = \alpha(\gamma_0) + \beta(\gamma_0)$.
  - *A $(0, \gamma_0)$ intervallumon a területfüggvény szigorúan monoton nő.*
  - *$\forall\gamma \in (0, \gamma_0)$ $(\gamma < \alpha(\gamma) + \beta(\gamma))$*
  - *A (γ_0, π) intervallumon a területfüggvény szigorúan monoton csökken.*
  - *$\forall\gamma \in (\gamma_0, \pi)$ $(\gamma > \alpha(\gamma) + \beta(\gamma))$*

Bizonyítás. A $CAB(\gamma)\triangle$ háromszög CA oldalához tartozó $C_1(\gamma)A_1(\gamma)$ középvonalon a $B(\gamma)$ csúcshoz legközelebbi pont (merőleges vetület, de gömbfelületen ebből kettő is lehet) legyen $B'(\gamma)$, ennek tükörképe a $B(\gamma)C$ oldal $A_1(\gamma)$ felezőpontjára $C'(\gamma)$, az $AB(\gamma)$ oldal $C_1(\gamma)$ felezőpontjára pedig $A'(\gamma)$. Jelöljük k-val a C közepű, $\frac{a}{2}$ sugarú kört. Könnyen látható, hogy a $CAA'(\gamma)C'(\gamma)$ pozitív körüljárású Saccheri-négyszög területe megegyezik a háromszög $t(\gamma)$ területével, s annál nagyobb,



mennél messzebb van CA felezőpontja CA felezeőmerőlegesének a középvonallal való metszetétől a CA egyenes $B(\gamma)$-t tartalmazó oldalán. (A körülményes megfogalmazásra azért van szükség, hogy gömbfelületen is helyes legyen.)

(1) Gömbfelületen $a + b \geq \pi$ esetén az $A_1(\gamma)C_1(\gamma)$ középvonal a CA egyenes $B(\gamma)$ oldalán egyedül az $A_1(\gamma)$ pontban mestszi, ezért
- $\pi > \gamma' > \gamma$ esetén az $A_1(\gamma)C_1(\gamma)$ középvonal elválasztja a CA oldalt az $A_1(\gamma')C_1(\gamma')$ középvonal CA egyenes $B(\gamma)$-t tartalmazó oldalán lévő felétől, azaz $t(\gamma') > t(\gamma)$.
- $0 < B(\gamma)CC'(\gamma)\angle = \frac{1}{2}\left(\beta(\gamma) + \alpha(\gamma) - \gamma\right)$

(2) Egyébként egyetlen középvonal érinti k-t egy $A_1(\gamma_0)$ pontban, minden más középvonal metszi k-t egy $A_1(\gamma)$ és egy $A_1(\gamma')$ pontban, ahol $0 < \gamma < \gamma_0 < \gamma' < \pi$, s így ez a $A_1(\gamma)C_1(\gamma) = A_1(\gamma')C_1(\gamma')$ középvonal elválasztja a CA oldalt a k kör $A_1(\gamma)\hat{A}_1(\gamma')$, $A_1(\gamma_0)$-t tartalmazó ívétől. Ezért:
- γ-ban t szigorúan monoton nő.
- $0 < B(\gamma)CC'(\gamma)\angle = \frac{1}{2}\left(\beta(\gamma) + \alpha(\gamma) - \gamma\right)$.
- γ'-ben t szigorúan monoton csökken.
- $0 > B(\gamma')CC'(\gamma')\angle = \frac{1}{2}\left(\beta(\gamma') + \alpha(\gamma') - \gamma'\right)$.

□

1. KÖVETKEZMÉNY. *Az (a, b) olló γ_0 nyílásszögű $A(\gamma_0)BC\triangle$ elemeiben,*

(1) ha $c(\gamma_0) \leq a$, akkor a $t(\gamma)$ területfüggvény γ_0-ban szigorúan monoton nő,

(2) ha $c(\gamma_0) > a, b$, és az $a, b, c(\gamma_0)$ oldalú háromszögnek nincs körülírt köre, akkor a $t(\gamma)$ területfüggvény γ_0-ban szigorúan monoton csökken,
(3) ha $c(\gamma_0) > a, b$, és az $a, b, c(\gamma_0)$ oldalú háromszög körülírt körének középpontja a háromszög külső pontja, akkor a $t(\gamma)$ területfüggvény γ_0-ban szigorúan monoton csökken,
(4) ha $c(\gamma_0) > a, b$, és az $a, b, c(\gamma_0)$ oldalú háromszög körülírt körének középpontja a háromszög belső pontja, akkor a $t(\gamma)$ területfüggvény γ_0-ban szigorúan monoton nő.

Bizonyítás. Vegyük sorra az eseteket:
(1) Ekkor a háromszög legnagyobb szöge nem γ_0, így $\gamma_0 < \alpha(\gamma_0) + \beta(\gamma_0)$.
A többi esetben tekintsük az $A(\gamma_0)BC\triangle$ háromszög körülírt ciklusának $A(\gamma_0)A'$, BB' és CC' (irányított) tengelyeit úgy, hogy

$$A'A(\gamma_0)B\measuredangle = A(\gamma_0)BB'\measuredangle < \frac{\pi}{2},$$
$$A'A(\gamma_0)C\measuredangle = A(\gamma_0)CC'\measuredangle < \frac{\pi}{2},$$
$$B'BC\angle = BCC'\measuredangle < \frac{\pi}{2}.$$

(2), (3) esetén így

$$\gamma_0 = A(\gamma_0)CC'\measuredangle + BCC'\measuredangle = CA(\gamma_0)A'\measuredangle + CBB'\measuredangle =$$
$$\alpha(\gamma_0) + \beta(\gamma_0) + A'AB\measuredangle + B'BA\measuredangle > \alpha(\gamma_0) + \beta(\gamma_0),$$

míg (4) esetén

$$\gamma_0 = A(\gamma_0)CC'\measuredangle + BCC'\measuredangle = CA(\gamma_0)A'\measuredangle + CBB'\measuredangle =$$
$$\alpha(\gamma_0) + \beta(\gamma_0) - A'AB\measuredangle - B'BA\measuredangle < \alpha(\gamma_0) + \beta(\gamma_0).$$

□

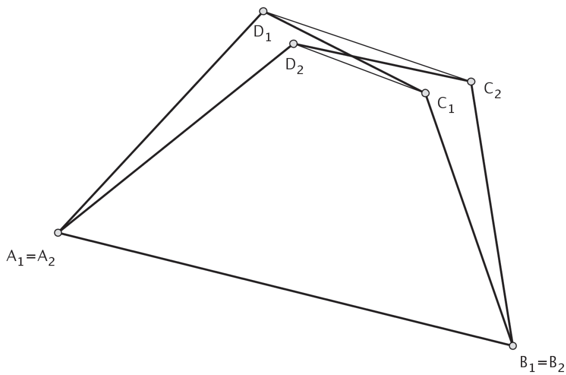
9. Lemma (Két négyszög). *Az abszolút síkon vagy a gömbfelületen legyenek az $A_1B_1C_1D_1$ és az $A_2B_2C_2D_2$ konvex négyszög egymásnak megfelelő oldalai egyenlő hosszúak, és legyen $A_1B_1C_1\angle < A_2B_2C_2\angle$. Ekkor*
(i) $C_1D_1A_1\angle < C_2D_2A_2$
(ii) $D_1A_1B_1\angle > D_2A_2B_2$, és
(iii) $B_1C_1D_1\angle > B_2C_2D_2$.

Bizonyítás. Az olló tétel miatt

$$A_1B_1C_1\angle < A_2B_2C_2\angle \implies A_1C_1 < A_2C_2 \implies C_1D_1A_1\angle < C_2D_2A_2$$

azaz (i) teljesül.
Feltehetjük, hogy $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ és mindkét négyszög a közös $A_1B_1 = A_2B_2$ ugyanazon oldalán van. Adott oldalhosszak mellett az egyik szögnek a többi három szög folytonos függvénye, ezért e három függvény monotonitását elegendő lokálisan igazolni. Legyen tehát most

$|A_2B_2C_2\angle - A_1B_1C_1\angle|$ olyan kicsiny, hogy az A_2C_1 egyenes egyik oldalán legyen a D_1 és D_2 pont.



Ha most (ii)-vel ellentétben $D_1A_1B_1 \geq D_2A_2B_2$ teljesülne, akkor

$$D_2B_2C_2\angle > D_2B_2C_1\angle \implies D_2C_1 < D_2C_2$$

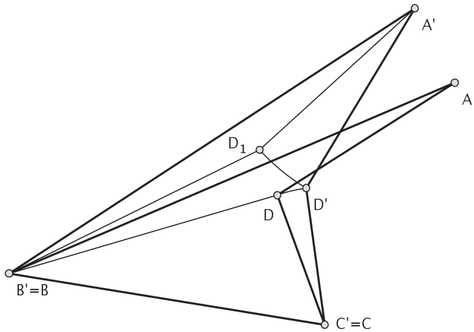
és

$$D_2A_2C_1\angle > D_1A_1C_1\angle \implies D_1C_1 < D_2C_1,$$

azaz $D_2C_2 > D_2C_1 \geq D_1C_1$ lenne, ami $D_1C_1 = D_2C_2$ miatt lehetetlen. Beláttuk tehát (ii)-t, (iii) pedig ugyanúgy kapható, csak fel kell cserélni a D_i és B_i pontok $(i = 1, 2)$ szerepét. □

10. Lemma (Konkáv négyszögek). *Az abszolút síkon vagy a gömbfelületen legyenek az $ABCD$ és az $A'B'C'D'$ négyszög egymásnak megfelelő oldalai egyenlő hosszúak, a D-beli és D'-beli szögek legyenek konkávak és legyen $ABC\angle < A'B'C'\angle$. Ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb az $A'B'C'D'$ négyszög területénél.*

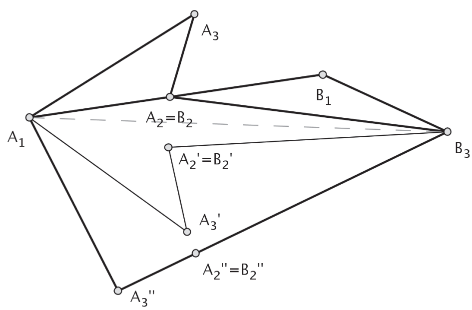
Bizonyítás. Helyezzük el az $A'B'C'D'$ négyszöget, hogy essenek egybe a $B' = B$ és $C' = C$ csúcsok, és mindkét négyszög legyen a közös BC oldalegyenes ugyanazon oldalán. A B közepű, A-t A'-be vivő forgatás vigye a $BDA\triangle$ háromszöget a $BD_1A'\triangle$ háromszögbe. $ABC\angle < A'B'C'\angle$ miatt így $D_1C > DC = D'C$ és $DA' > D'A' = D_1A'$. Az állítást elég lokálisan bizonyítani, ezért feltehetjük, hogy a B. D, D' és D_1 pontok az AC' egyenes ogyanazon oldalán vannak, következésképp az A' és C közepű, egymást D-ben metsző köröknek D_1 és D a külső íveken lévő olyan pontja, hogy $D'A'B\angle > D_1A'B\angle$ és $BCD'\angle > BCD\angle$. Ez azt jelenti hogy az $ABCD$ négyszöggel egyenlő összterületű $BCD\triangle$ és $D_1A'B\triangle$ háromszöglemezel az $A'B'C'D'$ négyszöglemez



részhalmazaként egyetlen közös ponttal rendelkeznek: B-vel, s így a lemmát igazoltuk. □

9. Tétel (Háromszögek addíciós tétele). *Az $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögek együttes területe kisebb, mint annak a $C_1C_2C_3C_4$ húrnégyszögnek a területe, aminek oldalai $C_1C_2 = A_1A_2+B_1B_2$, $C_2C_3 = A_3A_1$, $C_3C_4 = A_2A_3 + B_2B_3$ és $C_4C_1 = B_3B_1$. Gömbfelületen ez akkor áll, ha a háromszögek együttes kerülete kisebb 2π-nél.*

Bizonyítás. Helyezzük el a két háromszöget úgy, hogy az A_1A_2 oldalhoz annak egyenes folytatásaként csatlakozzon az $A_2 = B_2$ pontban a B_2B_1 oldal, és a közös oldalegyenes válassza el az A_3 és B_3 csúcsokat. Az $A_3A_2B_3\angle$ konvex (vagy egyenes) szöget így az A_1B_1 egyenes kettévágja,



tehát a szög az A_1 és B_1 csúcsok valamelyikét tartalmazza. Tegyük föl, hogy ez a csúcs a B_1. Ha nem így lenne, cseréljük fel az A_i és B_i pontokat. Ilymódon az $A_1B_3B_2A_3$ négyszögnek $A_2 = B_2$ csúcsában konkáv (vagy egyenes) szöge van. Ezt a négyszöget A_1B_3 oldalára tükrözve kapjuk az $A_1B_3B_2'A_3'$ konkáv négyszöget, amelynek területe (az $A_1B_3B_2'\triangle$ háromszög területével) nagyobb az $A_1A_2A_3\triangle$ háromszög területénél. A konkáv négyszögek területéről szóló lemma alapján legalább ekkora annak az $A_1B_3A_3''\triangle$ háromszögnek a területe, amelynek SA_3'' csúcsa az A_1B_3 egyenes A_3-at nem tartalmazó oldalán van, s aminek oldalaira $B_3A_3'' = A_2'A_3' + B_2'B_3 = A_2A_3 + B_2B_3$ és $A_3''A_1 = A_3'A_1 = A_3A_1$. Az $A_1A_2A_3\triangle$ és $B_1B_2B_3\triangle$ háromszögek együttes területére tehát

$$t(A_1A_2A_3) + t(B_1B_2B_3) < t(A_1B_3A_3'') + t(B_1B_2B_3) < t(B_1A_1A_3''B_3$$

$\square$

1. Megjegyzés. *Az az erősebb álltás, hogy egy a,b, c és egy a', b', c' odalú háromszög együttes területe kisebb, mint az $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$ oldalú háromszög területe, nem igaz a hiperbolikus síkon. Ha ugyanis mindkét háromszög területe nagyobb a határháromszög területének felénél, akkor a területek összege nagyobb bármely háromszög területénél.*

Belátható, hogy Euklídeszi síkon viszont igaz ez az erősebb változat. Nem tudom igazolni, de azt sejtem, hogy ez gömbön is áll, természetesen azzal a megkötéssel, hogy a két háromszög összkerülete nem haladja meg a főkör kerületét.

10. TÉTEL (Húrsokszögek addíciós tétele). *Az A húrsokszög oldalai legyenek $a_1, \ldots, a_r$, a B húrsokszög oldalai pedig $b_1, \ldots, b_s$ hosszúak. C legyen húrsokszög $a_1, \ldots, a_r$, $b_1, \ldots, b_s$ oldalhosszakkal, D egy másik húrsokszög $a_1 + b_1$, a_2, $\ldots$, a_r, b_2, $\ldots$, b_s oldalhosszakkal, E pedig egy harmadik húrsokszög $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3, \ldots, a_r, b_3, \ldots, b_s$ oldalhosszakkal. Ekkor az A és B húrsokszögek együttes területe*

$$t(A) + t(B) < t(E) < t(D) < t(C).$$

BIZONYÍTÁS. A sokszögekre vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy $t(E) < t(D) < t(C)$. Elegendő tehát $t(A) + t(B) < t(E)$-t igazolni.

A bizonyítás az A és B húrsokszög együttes oldalszámára, $s + r$-re vonatkozó teljes indukcióval történik.

A legkisebb lehetséges érték $s + r = 6$, amikor $s = r = 3$. Ekkor a bizonyítandó $t(A) + t(B) < t(E)$ egyenlőtlenség éppen a háromszögek addíciós tétele.

Tegyük most fel, hogy valamely $s+r = n \in \mathbb{N}$-re igaz az egyenlőtlenség, s legyen most $s+r = n+1$. A húrsokszög lemma miatt föltehetjük, hogy az a_1 és a_2 hosszú oldalak az A húrsokszögben, hogy a b_1 és b_2 hosszú oldalak pedig a B húrsokszögben egymás mellett vannak. Az a_1 és a_2 oldalak által kifeszített h_a háromszög harmadik oldalának hossza legyen a_0, míg a b_1 és b_2 oldalak által kifeszített h_b háromszög harmadik oldalának hossza legyen b_0. A' jelölje az A húrsokszögből a h_a háromszög levágásával keletkező (esetleg szakasszá fajuló) húrsokszöget, és B' jelölje az B húrsokszögből a h_b háromszög levágásával keletkező (esetleg szakasszá fajuló) húrsokszöget. A háromszögek addíciós tétele értelmében az $a_1 + b_1$, a_0, $a_2 + b_2$, b_0 oldalhosszúságokkal rendelkező h húrnégyszög területe $t(h) > t(h_a) + t(h_b)$.

Ragasszuk össze kívülről a h húrnégyszöget a B' (esetleg szakasszá fajuló) húrsokszöggel. A kapott sokszög oldalhosszai $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, b_0, a_3, $\ldots$, a_r. Az ugyanilyen oldalhosszakkal rendelkező H húrsokszög területe legalább ekkora, azaz

$$t(H) \geq t(h) + t(A') > t(h_a) + t(h_b) + t(A') = t(A) + t(h_b)$$

Most ragasszuk össze a H húrsokszöget és az (esetleg szakasszá fajuló) B'-t. A kapott, $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3, \ldots, a_r, b_3, \ldots, b_s$ oldalhosszakkal rendelkező S sokszög területe

$$t(S) = t(H) + t(h_b) + t(B') = t(H) + t(B).$$

Az előző egyenlőtlenséget is használva tehát az ugyanilyen oldalhosszakkal rendelkező húrsokszög legalább ekkora területére

$$t(E) \geq t(S) = t(H) + t(B) > t(A) + t(B)$$

□

7. FEJEZET

Szféra fedése kilenc ponthalmazzal

Heppes Aladár gyönyörű problémakört indított útjára cikkében [3]. Megkérdezte, hogy egy n pozitív egész számra melyik az a minimális, d_n-nel jelölt szám, melyre az egységgömb felszíne lefedhető n darab legfeljebb d_n átmérőjű halmazzal? Könnyen látható, hogy $d_1 = d_2 = d_3 = \pi$, és $d_4 = cos^{-1}(-\frac{1}{6})$. Heppes igazolta még többek között, hogy $d_8 = \frac{\pi}{2}$. Azt állította, hogy meglepő módon $d_9 = d_8$. Ennek indoklása azonban hibásnak bizonyult, s többünket bátorított, hogy vizsgáljuk meg a kérdést.

Sikerült bebizonyítanom, hogy Heppes Aladár sejtése igaz, tehát

11. Tétel. *Ha $d < \frac{\pi}{2}$, akkor kilenc legfeljebb d átmérőjű ponthalmazzal nem lehet lefedni az egységgömb felszínét.*

Használni fogom a következő két lemmát:

π π π
π π π
π π π
π π π
π π π
π π π
π π π
π π π
π π π
π π π
π π π
π π π

11. Lemma (Minimális szög). *Ha egy gömbháromszög két oldala által bezárt szög minimális és tompa, akkor mindkét oldal hosszabb, mint $\frac{\pi}{2}$.*

Bizonyítás. Könnyen igazolható, mivel nagyobb szöggel szemben nagyobb szög van, és $CAB\measuredangle + ABC\measuredangle > \pi \iff CA + CB > \pi$. Ez utóbbi azon múlik, hogy mind $CAB\measuredangle + ABC\measuredangle > \pi$, mind $CA + CB > \pi$ akkor teljesül, ha az $ABC\triangle$ háromszög tartalmazza a háromszöget közrefogó CA és CB által határolt gömbkétszög szimmetriaközéppontját. $\square$

12. Lemma (Tranzverzális). *Ha egy gömbháromszög A csúcsából induló mindkét oldal legalább $\frac{\pi}{2}$, akkor az A-ból induló bármely tranzverzális is legalább $\frac{\pi}{2}$.*

Bizonyítás. A feltételek alapján az A közepű nagykör komplementere tartalmazza a háromszög másik két csúcsát így az őket összekötő oldalt is. □

Következzen a tétel bizonyítása!

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt. Feltesszük tehát, hogy van egy $d < \frac{\pi}{2}$ szám és kilenc legfeljebb d átmérőjű ponthalmaz, melyek ellenpéldát adnak, azaz lefedik az egységgömb felszínét. A $\frac{\pi}{2}$-nél nem nagyobb átmérőjű halmaz konvex burka ugyanolyan átmérőjű, mint az eredeti ponthalmaz. A ponthalmaz lezárásával se változik az átmérő, ezért feltehető, hogy az ellenpélda kilenc konvex és zárt ponthalmaz, K_i, $(i = 1, \dots, 9)$, melyek uniója $S = \cup_1^9 K_i$ a gömb S felszíne.

Ismert, és könnyű belátni, hogy akkor, ha π-nél kisebb átmérőjű konvex zárt halmazok lefedik a H nyílt félgömböt, akkor H-nak van legalább háromszor lefedett pontja.

Van tehát S-nek olyan D pontja, amely benne van 3 halmazban, mondjuk K_7-ben, K_8-ban és K_9-ben. Gondoljunk D-re, mint a gömb déli pólusára, s jelöljük E-vel az északi pólust, e-vel pedig az egyenlítőt. Az E északi pólust fedje le mondjuk K_6.

Ez a négy halmaz $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb átmérőjű, így $K-7$, K_8 és K_9 a nyílt déli félgömbön, K_6 pedig a nyílt északi félgömbön van. A maradék öt halmaznak kell tehát az egyenlítőt lefednie, azaz $e \subset \cup_1^5 K_i$. Konvexek lévén metszetük az egyenlítővel egy-egy $\frac{\pi}{2}$-nél rövidebb szakasz, $A_iB_i = e \cap K_i$, $(i = 1, \dots, 5)$. Közülük tehát semelyik négy sem fedheti le a π hosszú egyenlítőt, így az egyenlítőn nincs legalább háromszor fedett pont. Indexelhetjük tehát az első öt halmazt úgy, s választhatjuk úgy a szakaszok kezdő és végpontját, hogy az egyenlítőn a kezdő és végpontok ciklikus sorrendje A_1, B_5, A_2, B_1, A_3, B_2, A_4, B_3, A_5, B_4. Itt A_1 egybeeshet B_5-tel, A_2 B_1-gyel, A_3 B_2-vel, A_4 B_3-mal és A_5 B_4-gyel.

Belátom, hogy a ciklikusan rendezett K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 halmazok közül csak a szomszédosaknak van közös pontja nem csak az egyenlítőn de ezon kívül is. Tegyük fel ugyanis indirekt módon, hogy az M pont benne van például K_1-ben és K_3-ban is. Ez a pont az egyenlítőtől legfeljebb $d < \frac{\pi}{2}$ távolságra van, azaz különbözik az északi pólustól. K_1 és K_3 minden pontja $\frac{\pi}{2}$-nél közelebb van M-hez, azaz benne van az északitól különböző M közepű nyílt félgömbben, ami az e egyenlítő egy f félkörét tartalmazza. Ez az f félkör így tartalmazza az A_1B_1-et és A_3B_3 szakaszokat, azaz az A_1B_3 íven lévő A_2B_2 szakaszt is. A maradék két, egyenként $\frac{\pi}{2}$-nél rövidebb A_4B_4 és A_5B_5 szakasz viszont nem fedheti le az egyenlítő $\frac{\pi}{2}$ hosszú maradékát. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat, tehát csak a szomszédos halmazoknak lehet közös pontja.

Az északi zárt félgömbön azonban bármely két szomszédos halmaznak a ciklikusan rendezett K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 halmazok közül van olyan közös pontja, mely uniójuk komplementumának is határpontja. Ezt a határpontot tehát más halmaznak is tartalmaznia kell, de ez csak K_6 lehet. Ilyen háromszorosan fedett pontok legyenek a $P_1 \in K_1 \cap K_2 \cap K_6$, $P_2 \in K_2 \cap K_3 \cap K_6$, $P_3 \in K_3 \cap K_4 \cap K_6$, $P_4 \in K_4 \cap K_5 \cap K_6$ és $P_5 \in K_5 \cap K_1 \cap K_6$ pontok.

Vegyük észre, hogy így $A_1P_1 \subset K_1 \cap K_2$, $A_2P_2 \subset K_2 \cap K_3$, $A_3P_3 \subset K_3 \cap K_4$, $A_4P_4 \subset K_4 \cap K_5$ és $A_5P_5 \subset K_5 \cap K_1$.

Legyen most $X_i \in A_iP_i$, $(i = 1, \ldots, 5)$ e szakaszok egy-egy tetszőleges pontja. Az előbbi tartalmazás alapján $X_1X_2 \subset K_2$, $X_2X_3 \subset K_3$, $X_3X_4 \subset K_4$, $X_4X_5 \subset K_5$ és $X_5X_1 \subset K_1$. Ezen ciklikusan rendezett szakaszok közül így csak a szomszédosaknak lehet közös pontja, mivel ez igaz az őket tartalmazó halmazokra is. Viszont a szomszédos szakaszoknál is csak a csatlakozási pont lehet közös, hiszen ha például X_1X_2 és X_2X_3 szöge 0 lenne, akkor vagy $X_1 \in X_2X_3$ vagy $X_3 \in X_1X_2$ teljesülne. Az első esetben X_1, a másodikban X_3 lenne $K_1 \cap K_3$-ban, amit már kizártunk.

Az előzőekből az következik, hogy az $X_1X_2X_3X_4X_5$ zárt töröttvonal ötszög, $A_1A_2X_2X_1 \subset K_1$, $A_2A_3X_3X_2 \subset K_2$, $A_3A_4X_4X_3 \subset K_3$, $A_4A_5X_5X_4 \subset K_4$ és $A_5A_1X_1X_5 \subset K_5$ pedig egy-egy négyszög vagy háromszög, ez a hat sokszög pedig egyrétűen lefedi az északi félgömböt. A négyszögek az egyenlítőbe metsző öt halmaz részei, tehát nem tartalmazzák az északi pólust, E-t. Ezért tehát $E \in X(X_1X_2X_3X_4X_5)$.

Válasszuk most úgy az $X_i \in A_iP_i$, $(i = 1, \ldots, 5)$ pontokat, hogy páronkénti távolságuk legfeljebb d legyen, s emellett legyen $\Sigma_1^5 A_iX_i$ minimális. Ezt azért tehetjük meg, mert egyrészt az $X_i = P_i$ választás kielégíti az első követelményt, a pontok zárt szakaszokon vannak, és az X_iX_j távolság az X_kA_k távolságok folytonos függvénye. Mivel $E \in X(X_1X_2X_3X_4X_5)$ és X átmérője $d < \frac{\pi}{2}$, ezért $X_i \notin e$, $(i = 1, \ldots, 5)$.

Így viszont mindegyik csúcs d távol van valamelyik másik csúcstól, hiszen egyébként közelebb lehetne vinni az egyenlítőhöz Ebből az következik, hogy az X ötszög szigorúan konvex.

Most két lehetőség van.

Az elsőben van a d átmérőjű X konvex ötszögnek d hosszú oldala, mondjuk X_1X_5. Ekkor X egy X_1 és X_2 csúcsú Rouleaux háromszög része, ezért a maradék három csúcs csak úgy lehet más csúcstól d távolságra, ha X_1-től vagy X_5-től d távol van. A lehetséges eshetőségeket végig véve adódik, vogy X-nek van két csatlakozó d hosszú átlója.

A második lehetőség az, hogy X-nek csak átlói lehetnek d hosszúak. Mivel mindegyik csúcsból indul ilyen d hosszú átló, Ezért most is van két csatlakozó d hosszú átló.

Emlékeztetni szeretnék arra, hogy az S gömbfelületen egy $V \subset S$ ponthalmaz polárhalmaza a $V' = \{R \in S | d(R, V) \geq \frac{\pi}{2}\}$ komplementer távolságtartomány. Ismert, és könnyen látható, hogy a $G \subset S$ konvex n-szög G' polárhalmazára

- G' is konvex n-szög.
- G' polárhalmaz polárhalmaza a G eredeti konvex halmaz.
- G minden V csúcsához tartozik a G' polár sokszög egy v oldala a V középű nagykörön, s ennek az oldalnak a hossza $\pi - \alpha$, ahol α a G sokszög V csúcsnál lévő szöge.
- G' minden V' csúcsa a G sokszög egy v oldalához tartozik, mely a V' középű nagykör íve.
- Ha V_1 és V_2 a G sokszög két szomszédos csúcsa, akkor G' ezen csúcsokhoz tartozó v_1 és v_2 oldalai a G' polársokszög $(v_1V_2)\measuredangle = \pi - V_1V_2$ szögű csúcsában csatlakoznak.

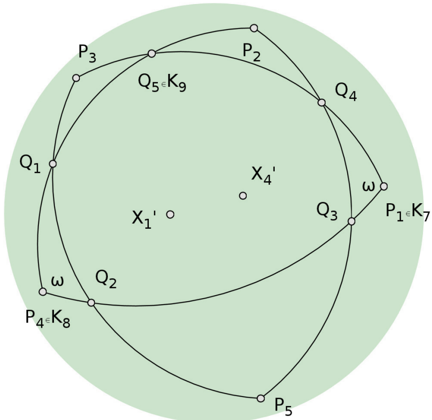
A későbbiekben a konvex ötszög átlói által határolt konvex ötszöget az előbbi ötszög magjának nevezem.

Az X konvex ötszög K magjának polárötszöge legyen K', X polárötszöge pedig X'.

A K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 halmazok mindegyike tartalmazza X legalább egy csúcsát, egészen pontosan két szomszédosat, X pedig mindegyiket. Ezen halmazok mindegyike kisebb, mint $\frac{\pi}{2}$ átmérőjű, ezért az X' polárhalmaz diszjunkt az általuk lefedett északi félgömbtől, a benne lévő K_6-tól, s egyenként a K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 halmazoktól. Így viszont X'-t a maradék három halmaz egyesítése, $\cup K_7 \cup K_8 \cup K_9$ le kell fedje az X' polárötszöget.

Legyen most X_i, X_j és X_k az X ötszög három egymás utáni csúcsa, s jelölje X_l és X_m a kimaradó két csúcsot. Jelölje P_j az K' azon csúcsát, mely a K magötszög X_iX_l oldalegyeneséhez tartozik. Mivel $X_iP_j = X_kP_j = \frac{\pi}{2}$, $X_iX_j \subset K_i$ és $X_jX_k \subset K_j$, ezért P_j nincs se X-ben, se K_i-ben, se K_j-ben. Mivel emellett X_lP_j és X_mP_j is nagyobb $\frac{\pi}{2}$-nél, ezért P_j nem lehet benne az eddigieken kívül se K_k-ban, se K_l-ben, ce K_m-ben. Így nemcsak X', de K' csúcsai, P_1, P_2, P_3, P_4 és P_5 is a maradék három halmaz egysítésében van.

A gömbi polaritás illeszkedéstartása miatt az X' a K' magja, egymást követő csúcsai pedig $Q_1 = P_2P_4.P_3P_5$, $Q_2 = P_3P_5.P_4P_1$, $Q_3 = P_4P_1.P_5P_2$, $Q_4 = P_5P_2.P_1P_3$ és $Q_5 = P_1P_3.P_2P_4$.



Összegezzük ismereteinket X'-ről és K'-ről:

(i) $X' \cup \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\} \subset K_7 \cup K_8 \cup K_9$.

(ii) Ha $A, B \in X$ az X ötszög tetszőleges két pontja, A' pedig az A átellenes pontja, akkor $A'B = \pi - AB \geq \frac{\pi}{2}$, tehát $A' \in X'$. Speciálisan X csúcsainak X_i', $(i = 1, \dots, 5)$ átellenes pontjai is benne vannak az X' polárötszögben. Ezekre az átellenes pontokra $X_1'Q_3 = X_1'Q_4 = X_1'P_2 = X_1'P_5 = \frac{\pi}{2}$, $X_2'Q_4 = X_2'Q_5 = X_2'P_3 = X_2'P_1 = \frac{\pi}{2}$, $X_3'Q_5 = X_3'Q_1 = X_3'P_4 = X_3'P_2 = \frac{\pi}{2}$, $X_4'Q_1 = X_4'Q_2 = X_4'P_5 = X_4'P_3 = \frac{\pi}{2}$ és $X_5'Q_2 = X_5'Q_3 = X_5'P_1 = X_5'P_4 = \frac{\pi}{2}$. Ezért a $\{P_1, Q_2, Q_3, P_4\}$, $\{P_2, Q_3, Q_4, P_5\}$, $\{P_3, Q_4, Q_5, P_1\}$, $\{P_4, Q_5, Q_1, P_2\}$ és $\{P_5, Q_1, Q_2, P_3\}$ négyesek mindegyikét két-két halmaz fedi K_7, K_8 és K_9 közül. Ugyanis például az első négyes egyik elemét se fedi ugyanis az X_5'-t fedő, $\frac{\pi}{2}$ nél kisebb átmérőjű halmaz.

(iii) X' és a $P_1P_3P_5P_2P_4$ csillagötszög szögei legalább $\frac{\pi}{2} - d$ nagyságúak, és van két szomszédos csúcs a csillagötszögben, melyeknél a csillagötszög szöge éppen $\frac{\pi}{2} - d$. Föltehetjük, hogy $\omega = Q_5P_4P_1\measuredangle = P_4P_1Q_5\measuredangle = \frac{\pi}{2} - d$ ez a két szomszédos szög.

(iv) Használjuk a minimális szög lemmát a $Q_5P_4P_1\triangle$ és $Q_2P_1Q_5\triangle$ háromszögekre. Eredményként kapjuk, hogy Q_5P_4, Q_5P_1, P_4Q_3 és Q_2P_1 mind nagyobb, mint $\frac{\pi}{2}$. Ily módon a Q_5, P_4 és P_1 pontok különböző halmazokban vannak. Föltehetjük, hogy $P_1 \in K_7$, $P_4 \in K_8$ és $Q_5 \in K_9$. Most viszont (ii) miatt $Q_2 \in K_8$, $Q_3 \in K_7$, P_2, P_3 K_9, következésképpen $X_1' \in K_8$ és $X_4' \in K_7$ is teljesül. E két utóbbi miatt $P_5 \in K_9$.

(v) Jelöljük a $P_5Q_5.Q_2Q_3$ metszéspontot R-rel. A tranzverzális lemm miatt így $P_5Q_5 > RQ_5 > \frac{\pi}{2}$ és $P_5 \notin K_9$.

A (iv) és (v) közti ellentmondás bizonyítja az indirekt feltevés hamisságát, s ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

Befejezés, köszönetnyilvánítások

Néhány szó a húrsokszög bizonyításának tétel történetéről. Még az olimpiai szakkörön tette fel a kérdést Reiman István, tudunk-e trigonometria nélküli bizonyítást arra, hogy adott oldalhosszakkal a húrnégyszög a maximális területű négyszög? Az itt leírt bizonyítást, mely egységes állandó görbületű felületen, neki ajánlom.

Vegyük észre, hogy a Dido-tétel bizonyításának egyetlen eleme nem működik gömbfelületen, s ez a hegyes csúcs lemma. Igazából azt se tudom, hogy ott igaz-e ez a lemma. Mindenképpen jó lenne belátni, hogy a Dido-tétel gömbön is igaz. Úgy sejtem, hogy a festett t-sokszögekre vonatkozó Dido-tétel is igaz gömbön.

Heppes Aladár gömbfedési problémája nagyrészt nyitott. Még d_7 se ismert, bár Heppes **c**ikkében kézenfekvő sejtést mond ki rá.

Szeretnék köszönetet mondani legelőször Böröczky Károlynak, aki akkor is bíztatott, amikor én már mindenről lemondtam. Hálás vagyok Heppes Aladárnak is a gyönyörű problémáért és azért, hogy Böröczky Károllyal együtt alaposan ellenőrizték a gömbfedési tétel bizonyítását. Ugyancsak szeretném megköszönni kollégáimnak, hogy eredményeimet türelmesen meghallgatták és oktatási terheimen is könnyítettek. A legtöbbet mégis feleségemnek köszönhetek, aki akkor is szeretett, amikor gondjaim miatt rosszkedvű voltam.

Irodalomjegyzék

[1] Károly Böröczky. személyes beszélgetés.

[2] L. Fejes-Tóth. "Über das Didosche Problem". In: *Elem. Math.* 23 (1968), pp. 97–101.

[3] A. Heppes. "Decomposing the 2-sphere into domains of smallest possible diameter". In: *Periodica Math. Hungarica* 36/2-3 (1998), pp. 171–180.

[4] Alan Siegel. "A Dido Problem as modernized by Fejes-Tóth". In: *Discrete & Computational Geometry* 22 (2002), pp. 227–238.

[5] V. A. Zalgaller Yu. D. Burago. *Geometric inequalities*. Springer-Verlag.